

6. त्रिभुज

प्रश्नावली 6.1

Q1. कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) सभी वृत्तहोते हैं। (सर्वांगसम, समरूप)

(ii) सभी वर्ग.....होते हैं। (समरूप, सर्वांगसम)

(iv) सभी त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)

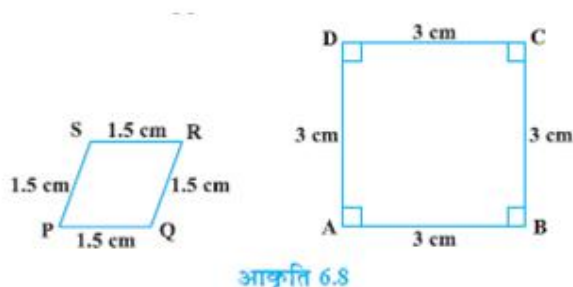
(v) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (i) उनके संगत कोणहो तथा (ii) उनकी संगतभुजाएँ हों। (बराबर, समानुपाती)

Q2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए :

(i) समरूप आकृतियाँ

(ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।

Q3. बताइए की निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप है या नहीं :



प्रश्नावली 6.2

Q1. आकृति 6.17 (i) और (ii) में, $DE \parallel BC$ में AD ज्ञात कीजिए :

हल: (i)

ΔABC में

$DE \parallel BC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय से

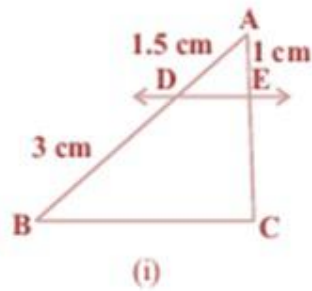
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$$

$$\Rightarrow 1.5 CE = 3$$

$$\Rightarrow CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$$

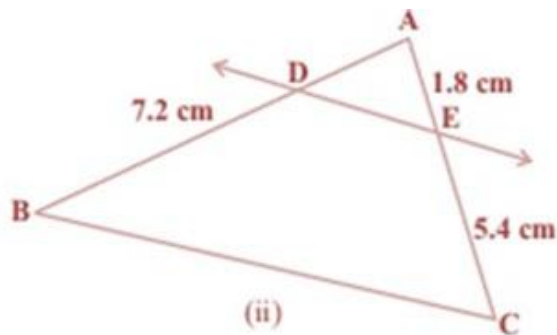
$$\Rightarrow CE = 2$$



हल: (ii)

ΔABC में

DE $\parallel$ BC दिया है।



अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{3} = \frac{1}{CE}$$

$$\Rightarrow 1.5 CE = 3$$

$$\Rightarrow CE = \frac{3}{1.5} = \frac{30}{15} = 2$$

$$\Rightarrow CE = 2$$

Q2. किसी त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या EF $\parallel$ QR है।

- (i) $PE = 3.9 \text{ cm}$, $EQ = 3 \text{ cm}$, $PF = 3.6$ और $FR = 2.4 \text{ cm}$
- (ii) $PE = 4 \text{ cm}$, $QE = 4.5 \text{ cm}$, $PF = 8 \text{ cm}$ और $RF = 9 \text{ cm}$
- (iii) $PQ = 1.28 \text{ cm}$, $PR = 2.56 \text{ cm}$, 0.18 cm और $PF = 0.36 \text{ cm}$

हल Q2:

- (i) $PE = 3.9 \text{ cm}$, $EQ = 3 \text{ cm}$, $PF = 3.6$ और $FR = 2.4 \text{ cm}$

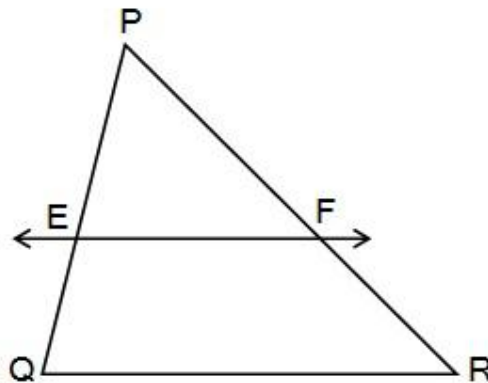
$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\Rightarrow \frac{3.9}{3} = \frac{3.6}{2.4}$$

$$\Rightarrow \frac{39}{30} = \frac{36}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{10} \neq \frac{3}{2}$$



इसलिए, $EF \parallel QR$ नहीं है।

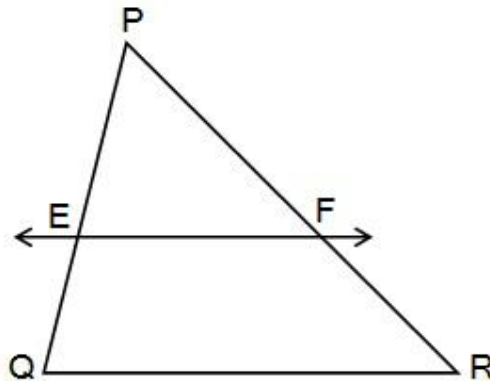
(ii) $PE = 4 \text{ cm}$, $QE = 4.5 \text{ cm}$, $PF = 8 \text{ cm}$ और $RF = 9 \text{ cm}$

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$



अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

इसलिए, $EF \parallel QR$ है ।

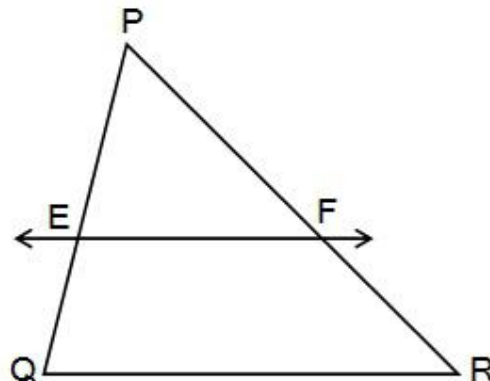
(iii) $PQ = 1.28 \text{ cm}$, $PR = 2.56 \text{ cm}$, $PE = 0.18 \text{ cm}$ और $PF = 0.36 \text{ cm}$

$$\therefore \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{0.18}{1.28} = \frac{0.36}{2.56}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{128} = \frac{36}{256}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{64} = \frac{9}{64}$$



अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय के विलोम से

इसलिए, $EF \parallel QR$ है ।

Q3. आकृति 6.18 में यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} \text{ है ।}$$

हल:

ΔABC में

$ML \parallel BC$ दिया है ।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{AL}{CL} \quad \dots(1)$$

ΔACD में

$NL \parallel DC$ दिया है ।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AN}{ND} = \frac{AL}{CL} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{ND}$$

व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

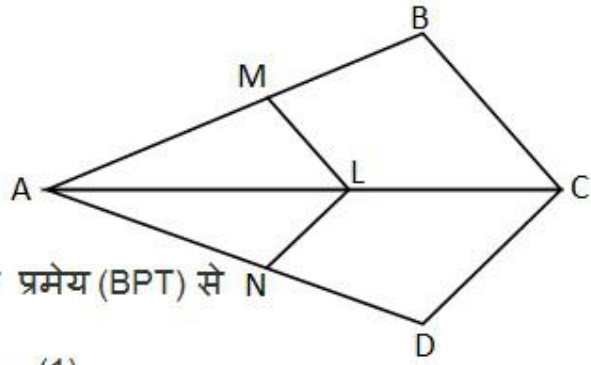
$$\frac{BM}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

दोनों तरफ 1 जोड़ने पर

$$\begin{aligned} \frac{BM}{AM} + 1 &= \frac{ND}{AN} + 1 \\ \frac{BM + AM}{AM} &= \frac{ND + AN}{AN} \\ \frac{AB}{AM} &= \frac{AD}{AN} \end{aligned}$$

पुनः व्युत्क्रमानुपाती लेने पर

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} \quad \text{Proved}$$

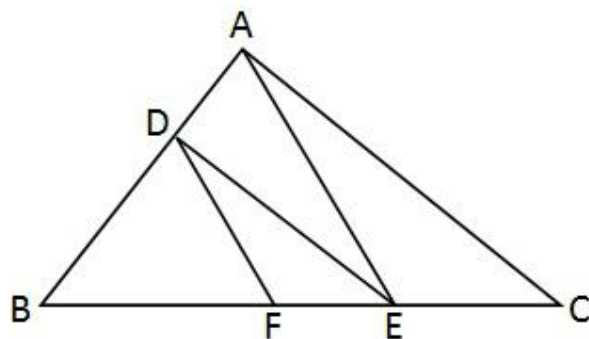


Q4. आकृति 6.19 में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है

हल:

$\triangle ABC$ में

$DE \parallel AC$ दिया है।



अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BE}{EC} \quad \dots\dots(1)$$

$\triangle ABE$ में

$DF \parallel AE$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{FE} \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

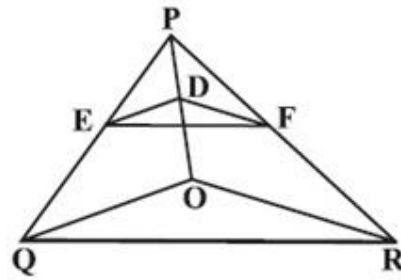
$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

Q5. आकृति 6.20 में $DE \parallel OQ$ और OR है | दर्शाइए की $EF \parallel QR$ है |

हल:

ΔPOQ में

$DE \parallel OQ$ दिया है |



अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \quad \dots(1)$$

ΔPOR में

$DF \parallel OR$ दिया है |

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

चूँकि भुजाएँ समानुपातिक है |

इसलिए, आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

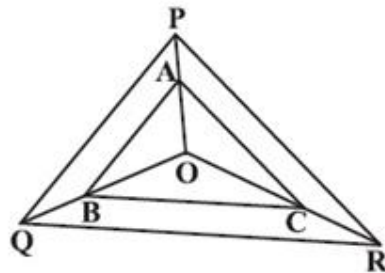
$EF \parallel QR$ Proved

Q6. आकृति 6.21 में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C इस प्रकार है कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।

हल:

ΔPOQ में,

$AB \parallel PQ$ दिया है।



अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ} \quad \dots\dots(1)$$

ΔPOR में

$AC \parallel PR$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

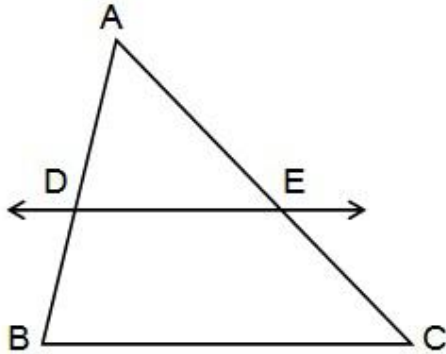
$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

चूँकि भुजाएँ समानुपातिक है।

इसलिए, आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम से

$BC \parallel QR$ Proved

Q7. प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए की आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)



हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी

भुजा AB का मध्य-बिंदु D है और $DE \parallel BC$ है।

सिद्ध करना है : $AE = EC$

प्रमाण : $\triangle ABC$ में

$AD = BD$ (1) दिया है।

$DE \parallel BC$ दिया है।

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

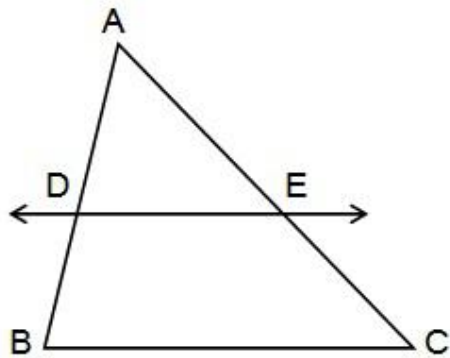
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$\text{अथवा } \frac{AD}{AD} = \frac{AE}{CE} \quad (\text{समीकरण 1 से})$$

$$\text{अथवा } \frac{1}{1} = \frac{AE}{CE} \quad (\text{Bi-cross multiplication})$$

$$\Rightarrow AE = EC \quad \text{Proved}$$

Q8. प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए की एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है। (याद कीजिए की आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं)।



हल:

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसकी

भुजा AB तथा AC का मध्य-बिंदु क्रमशः

D तथा E है।

सिद्ध करना है : $DE \parallel BC$

प्रमाण : $\triangle ABC$ में

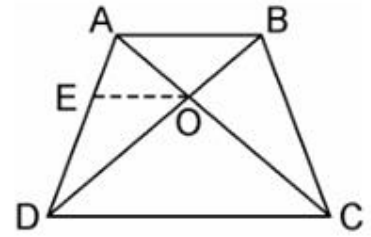
$AD = BD$ (1) दिया है।

$AE = EC$ (2) दिया है।

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

अथवा $\frac{AD}{AD} = \frac{AE}{AE} = \frac{1}{1}$ (समीकरण 1 तथा 2 से)

Q9. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए की $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।



हल:

दिया है : ABCD एक समलंब है जिसमें

$AB \parallel CD$ है। और विकर्ण AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

रचना : बिंदु O से $AB \parallel EO$ खिंचा।

प्रमाण : $AB \parallel EO$ (1) रचना से

$AB \parallel CD$ (2) दिया है।

समीकरण (1) तथा (2) से

$EO \parallel CD$ (3)

$\triangle ABD$ में

$AB \parallel EO$ रचना से

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO}$ (4)

इसीप्रकार, $\triangle ABD$ में

$EO \parallel CD$ (3) से

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \quad \text{..... (5)}$$

समीकरण (4) तथा (5) से

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$$

अथवा $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ [एकान्तरानुपात (alternendo) लगाने पर]

Proved

Q10. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि ABCD एक समलंब है।

हल:

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण

AC तथा BD एक दुसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

और $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

सिद्ध करना है : ABCD एक समलंब है।

रचना : बिंदु O से AB $\parallel$ EO खिंचा।

प्रमाण : $\triangle ABD$ में

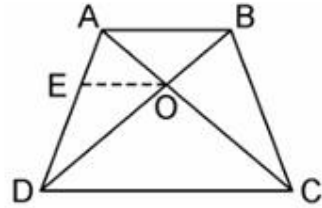
AB $\parallel$ EO रचना से

अतः आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) से

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{जबकि, } \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

$$\text{अथवा } \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \quad \dots\dots\dots (2) \quad [\text{एकान्तरानुपात (alternendo) लगाने पर}]$$



समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO}$$

$\triangle ACD$ की संगत खंड की भुँजायें समानुपाती हैं | इसलिए आधारभूतिक समानुपातिक प्रमेय (BPT) के विलोम प्रमेय 6.2 से

$$EO \parallel CD \quad \dots\dots\dots (3)$$

और

$$EO \parallel AB \quad \dots\dots\dots (4) \text{ रचना से}$$

समीकरण (3) तथा (4) से

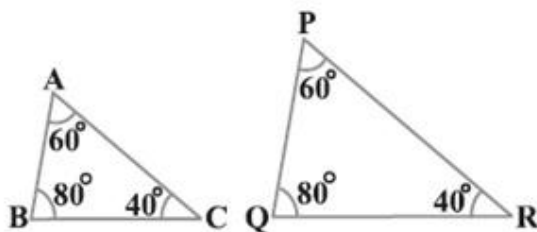
$$AB \parallel CD$$

अतः ABCD एक समलंब है |

Proved

प्रश्नावली 6.3

Q1. बताइए कि आकृति 6.34 में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन - कौन से युग्म समरूप हैं | उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए |



हल : (i)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$$\angle ABC = \angle PQR = 80^\circ$$

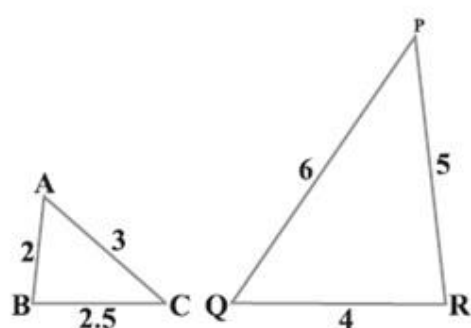
$$\angle BAC = \angle QPR = 60^\circ$$

$$\angle ACB = \angle PRQ = 40^\circ$$

$\therefore$ AAA समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

हल : (ii)



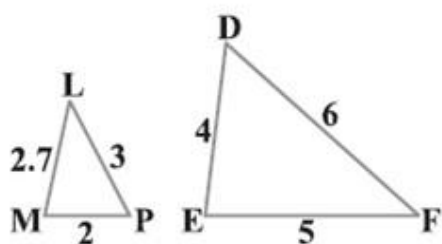
$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

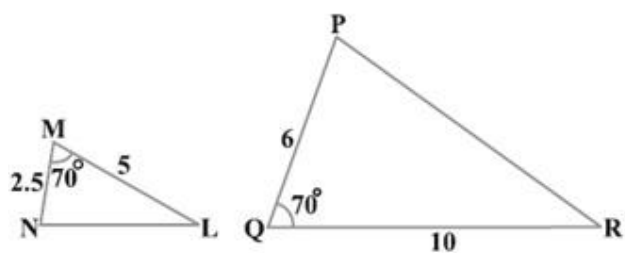
$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

हल : (iii)



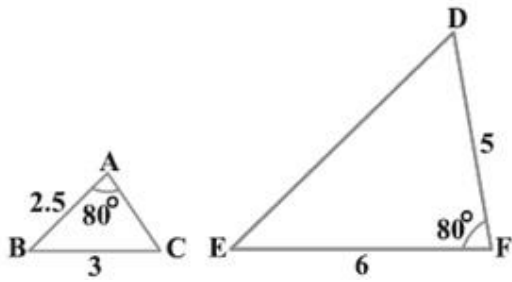
त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।

हल : (iv)



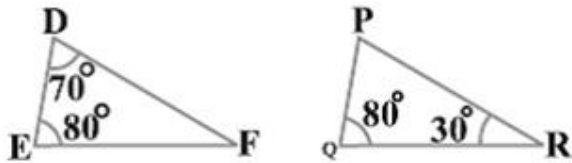
त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।

हल : (v)



त्रिभुजों का यह युग्म समरूप नहीं है।

हल : (vi)



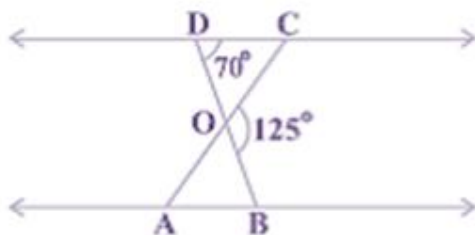
$\triangle ABC$ तथा $\triangle QRP$ में

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ SSS समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

Q2. आकृति 6.35 में, $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.35

हल : $\angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$$\Rightarrow \angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DOC = 55^\circ$$

अब $\triangle DOC$ में,

$$\angle DOC + \angle CDO + \angle DCO = 180^\circ \text{ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग)}$$

$$\Rightarrow 55^\circ + 70^\circ + \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 125^\circ \angle DCO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 180^\circ - 125^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DCO = 55^\circ$$

$\triangle ODC \sim \triangle OBA$ (दिया है)

$$\therefore \angle OAB = \angle DCO = 55^\circ$$

समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं।)

Q3. समलंब ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए,

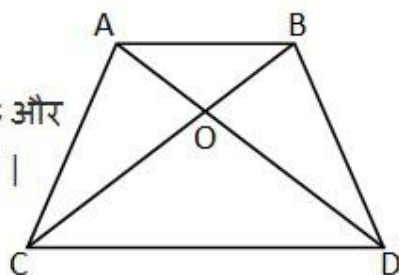
दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

हल :

दिया है : समलंब ABCD,

जिसमें $AB \parallel DC$ हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$



प्रमाण: $AB \parallel CD$ दिया है

$\therefore \angle ABO = \angle DCO$ (एकांतर कोण) ...(1)

अब $\triangle AOB$ तथा $\triangle COD$ में

$\angle ABO = \angle DCO$ (1) से

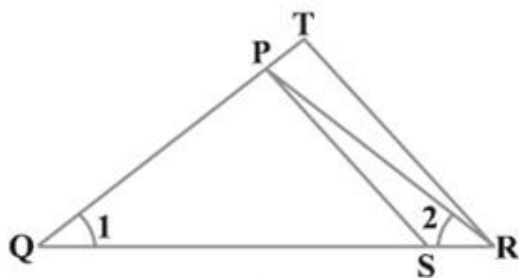
$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

A.A समरूपता कसौटी से

$\triangle AOB \sim \triangle COD$

$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजा समानुपाती होते हैं।)

Q4. आकृति 6.36 में, $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए की $\angle PQS \sim \angle TQR$ है।



हल :

दिया है : $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है ।

सिद्ध करना है : $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

प्रमाण : ΔPQR में,

$$\angle 1 = \angle 2 \quad (\text{दिया है})$$

$\therefore PQ = PR$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजा) ...(1)

और $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ दिया है

या $\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$ समी० (1) से (2)

ΔPQS तथा ΔTQR में

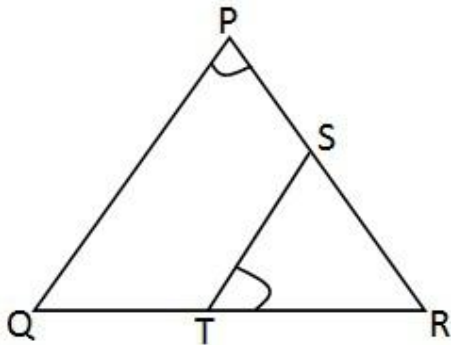
$$\frac{OR}{QS} = \frac{QT}{PQ} \quad \text{समी० (2) से}$$

$$\angle 1 = \angle 1 \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

SAS समरूपता कसौटी से

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$ Proved

Q5. ΔPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है।



हल:

दिया है : DPQR की भुजाओं PR और QR पर

क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं

कि $\angle P = \angle RTS$ है।

सिद्ध करना है : $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$

प्रमाण : $\triangle RPQ$ तथा $\triangle RTS$ में,

$$\angle P = \angle RTS \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle R = \angle R \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle RPQ \sim \triangle RTS$$

Q6. आकृति 6.37 में, यदि $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ है।

हल:

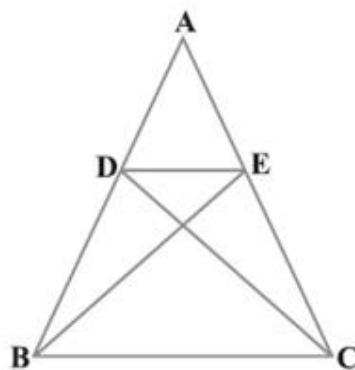
दिया है : $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ है

सिद्ध करना है : $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

प्रमाण : $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ (दिया है)

$$\therefore \left. \begin{array}{l} AB = AC \\ AE = AD \end{array} \right\} \text{ By CPCT}$$

अथवा $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} \dots\dots (1)$



$\triangle ADE$ तथा $\triangle ABC$ में

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} \dots\dots \text{समी० (1) से}$$

$$\angle A = \angle A \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

S.A.S समरूपता कसौटी से

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ **Proved**

Q7. आकृति 6.38 में, DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो दर्शाइए कि :

- (i) $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
- (ii) $\triangle ABD \sim \triangle CBE$
- (iii) $\triangle AEP \sim \triangle ADB$
- (iv) $\triangle PDC \sim \triangle BEC$

हल:

दिया है : DABC के शीर्षलंब AD और CE परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

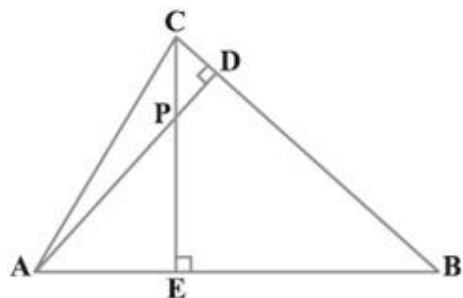
सिद्ध करना है :

- (i) $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
- (ii) $\triangle ABD \sim \triangle CBE$

(iii) $\triangle AEP \sim \triangle ADB$

(iv) $\triangle PDC \sim \triangle BEC$

प्रमाण :



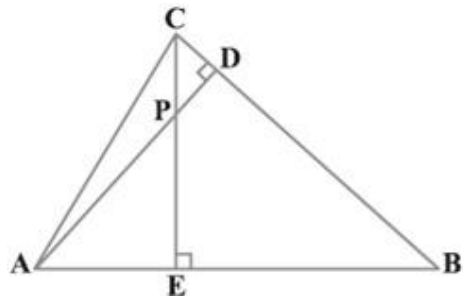
(i) $\triangle AEP$ तथा $\triangle CDP$ में,

$$\angle AEP = \angle CDP \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle APE = \angle CPD \text{ (शीर्षाभिमुख कोण)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle AEP \sim \triangle CDP$$



(ii) $\triangle ABD$ तथा $\triangle CBE$ में

$$\angle ADB = \angle CEB \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle B = \angle B \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle CBE$$

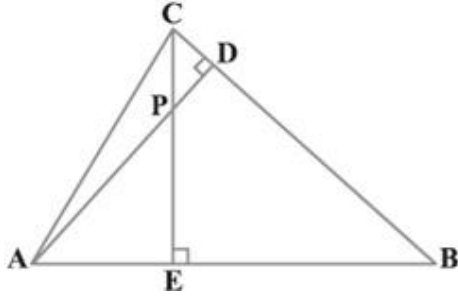
(iii) $\triangle AEP$ तथा $\triangle ADB$ में

$$\angle AEP = \angle ADB \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle A = \angle A \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta AEP \sim \Delta ADB$$



(iv) ΔPDC तथा ΔBEC में

$$\angle PDC = \angle BEC \quad (\text{प्रत्येक } 90^\circ)$$

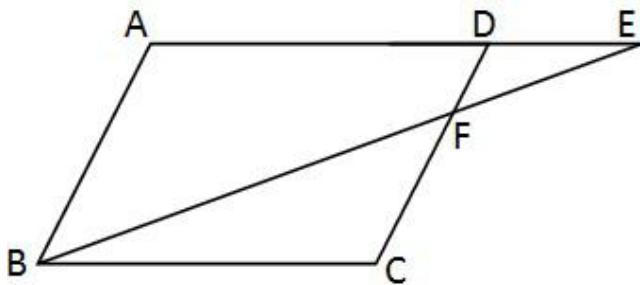
$$\angle C = \angle C \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta PDC \sim \Delta BEC$$

Q8. समान्तर चतुर्भुज ABCD की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है | दर्शाइए कि $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ है |

हल:



दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिंदु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है |

सिद्ध करना है : $\Delta ABE \sim \Delta CFB$

प्रमाण : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है |

$$\angle AEB = \angle CBE \quad \dots (1) \text{ एकान्तर कोण}$$

ΔABE तथा ΔCFB में,

$$\angle AEB = \angle CBE \text{ समी० (1) से}$$

$$\angle A = \angle C \text{ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta ABE \sim \Delta CFB$$

Q9. आकृति 6.39 में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिसके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि :

$$(i) \Delta ABC \sim \Delta AMP$$

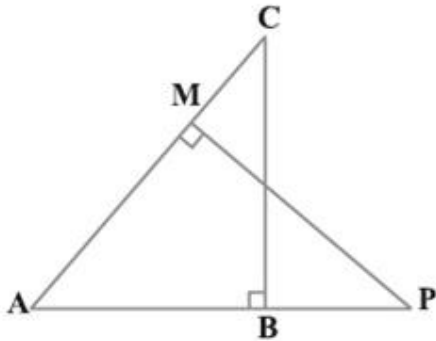
$$(ii) \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

हल:

दिया है : ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिसके कोण B और M समकोण हैं।

सिद्ध करना है :

$$(i) \Delta ABC \sim \Delta AMP$$



$$(ii) \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

प्रमाण :

$$(i) \Delta ABC \text{ तथा } \Delta AMP \text{ में}$$

$$\angle ABC = \angle AMP \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle A = \angle A \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

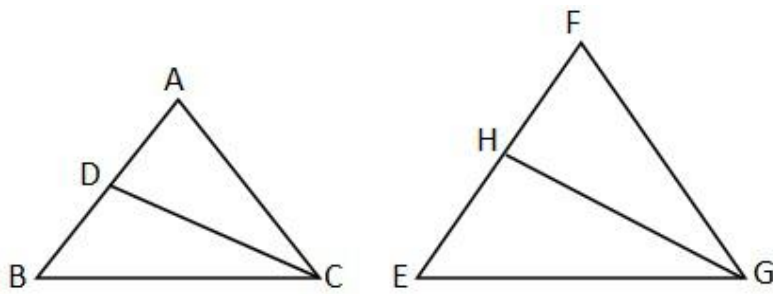
A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta ABC \sim \Delta AMP$$

$$(ii) \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

(चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं।)

Q10. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः ΔABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं | यदि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ है, तो दर्शाइए कि :



$$(i) \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

$$(ii) \Delta DCB \sim \Delta HGE$$

$$(iii) \Delta DCA \sim \Delta HGF$$

हल:

दिया है : CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः ΔABC और ΔFEG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं और $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ है |

सिद्ध करना है :

$$(i) \quad \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

$$(ii) \quad \Delta DCB \sim \Delta HGE$$

$$(iii) \quad \Delta DCA \sim \Delta HGF$$

प्रमाण :

$\Delta ABC \sim \Delta FEG$ दिया है ।

$$\begin{array}{l} \therefore \angle A = \angle F \\ \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle G \end{array} \left. \begin{array}{l} \dots(1) \\ \dots(2) \\ \dots(3) \end{array} \right\}$$

(समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं।)

(i) ΔABC तथा ΔAMP में

(ii) ΔDCB तथा ΔHGE में,

$$\angle B = \angle E \text{ समी० (2) से}$$

$$\angle BCD = \angle EGH \text{ [चूँकि } \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G \text{ समी० (3) से]}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta DCB \sim \Delta HGE$$

(iii) ΔDCA तथा ΔHGF में

$$\angle A = \angle F \text{ समी० (1) से}$$

$$\angle ACD = \angle FGH \text{ [चूँकि } \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle G \text{ समी० (3) से]}$$

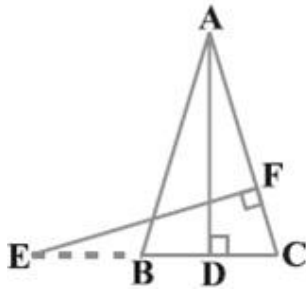
A.A समरूपता कसौटी से

$$\Delta DCA \sim \Delta HGF \text{ Proved}$$

Q11. आकृति 6.40 में, $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है | यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABD \sim \triangle ECF$ है |

हल:

दिया है : $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है जिसमें $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है



सिद्ध करना है :

$$\triangle ABD \sim \triangle ECF$$

प्रमाण :

$\triangle ABC$ में,

$AB = AC$ दिया है;

$\therefore \angle B = \angle C$ (1) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle ECF$ में

$$\angle ADB = \angle EFC \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle B = \angle C \text{ समी० (1) से}$$

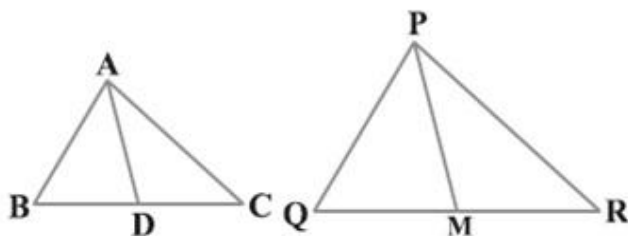
A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle ECF \text{ Proved}$$

Q12. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं (देखिए आकृति 6.41)| दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है |

हल:

दिया है : त्रिभुज ABC कि भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज PQR की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं ।



सिद्ध करना है :

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

प्रमाण :

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \dots\dots (\text{ दिया है })$$

$$\text{अथवा } \frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2} BC}{\frac{1}{2} QR} = \frac{AD}{PM}$$

$$\text{अथवा } \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \dots\dots (1)$$

(चूँकि माध्यिकाएँ AD तथा PM BC तथा QR को समद्विभाजित करती हैं ।)

अब, $\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \quad \text{समी० (1) से}$$

S.S.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$$\therefore \angle B = \angle Q \quad \dots\dots (2)$$

अब, $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad (\text{दिया है})$$

$$\text{और} \quad \angle B = \angle Q \quad \text{समी० (2) से}$$

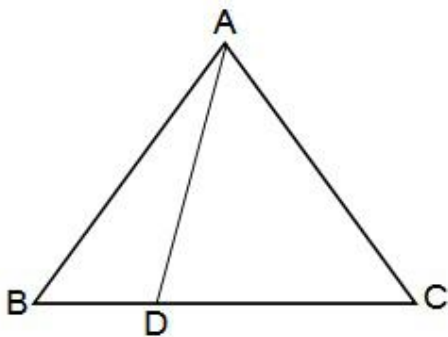
S.A.S समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR \quad \text{Proved}$$

Q13. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है | दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है |

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है |



सिद्ध करना है : $CA^2 = CB \cdot CD$

प्रमाण :

अब, $\triangle ADC$ तथा $\triangle BAC$ में

$$\angle ADC = \angle BAC \text{ (दिया है)}$$

$$\angle C = \angle C \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

A.A समरूपता कसौटी से

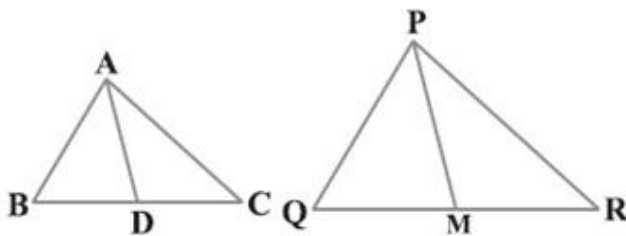
$$\triangle ADC \sim \triangle BAC$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{AC} \text{ (चूँकि समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)}$$

$$\text{या } CA^2 = CB \cdot CD \text{ (बाई-क्रॉस गुणा करने पर)}$$

Proved

Q14. एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं | दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है |



हल :

दिया है : $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \text{ है और AD तथा PM माध्यिकायें हैं ।}$$

सिद्ध करना है : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$$\text{प्रमाण : } \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM} \dots\dots\dots (1) \text{ दिया है ।}$$

यहाँ माध्यिकाएँ समान अनुपात में हैं इसलिए समान अनुपात की माध्यिकायें जिस भुजा को समद्विभाजित करती है वह भी समानुपाती होता है |

$$\therefore \frac{AD}{PM} = \frac{BC}{QR} \dots\dots\dots (2)$$

समी० (1) तथा (2) से

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} \dots\dots\dots (3)$$

ΔABC तथा ΔPQR में

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} \text{ .समी. (3) से}$$

S.S.S समरूपता कसौटी से

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ Proved

Q15. लंबाई 6m वाले एक उध्वार्धर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लंबाई 4m है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लंबाई 28 m है | मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए |

हल:

माना PQ मीनार है जबकि ST स्तम्भ है | TR स्तम्भ

की छाया है और QR मीनार की छाया है |

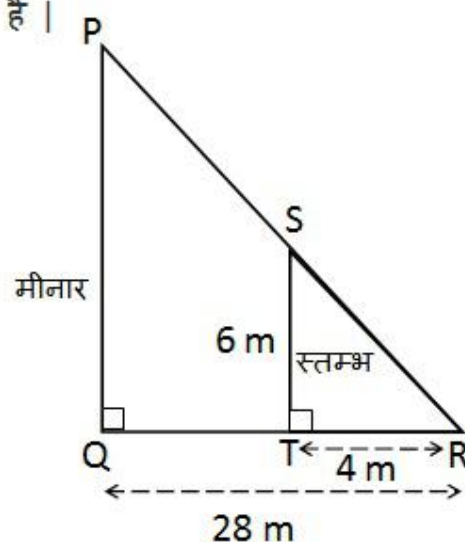
$\triangle PQR$ तथा $\triangle STR$ में,

$$\angle PQR = \angle STR \quad (\text{प्रत्येक } 90^\circ)$$

$$\angle R = \angle R \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle PQR \sim \triangle STR$$



$$\therefore \frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{TR} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं})$$

$$\text{या} \quad \frac{PQ}{6} = \frac{28}{4}$$

$$\text{या } 4 \text{ PQ} = 6 \times 28$$

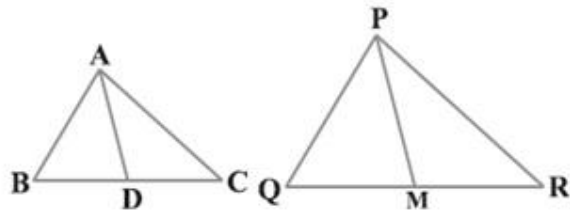
$$\text{या } \text{PQ} = \frac{6 \times 28}{4} = 42 \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई = 42 m

Q16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएं हैं, जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।

सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।

हल:



दिया है : AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएं हैं, जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।

सिद्ध करना है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

प्रमाण : $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ दिया है।

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं})$$

$$\text{या } \frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}QR}$$

$$\text{या } \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \quad \dots (1)$$

$$\text{और } \angle B = \angle Q \quad \dots (2) \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत कोण})$$

$\triangle ABD$ तथा $\triangle PQM$ में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \quad \dots (1) \text{ से}$$

$$\angle B = \angle Q \quad \dots (2) \text{ से}$$

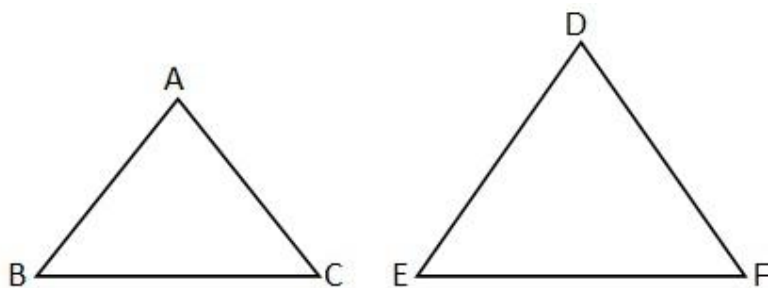
SAS समरूपता कसौटी से

$$\triangle ABD \sim \triangle PQM$$

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM} \quad \text{Proved}$$

प्रश्नावली 6.4

Q1. मान लीजिए $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64cm^2 और 121 cm^2 हैं | यदि $EF = 15.4\text{ cm}$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए |



हल : $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (दिया है)

$\therefore$ प्रमेय 6.6 से

$$\frac{ar(ABC)}{ar(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

या $\sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{BC}{15.4}$

या $\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$

$$11 BC = 8 \times 15.4$$

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11}$$

$$= \frac{8 \times 154}{110} = \frac{8 \times 14}{10} = \frac{112}{10} = 11.2$$

Q2. एक समलंब ABCD जिसमें $AB \parallel DC$ हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2 CD$ हो तो $\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

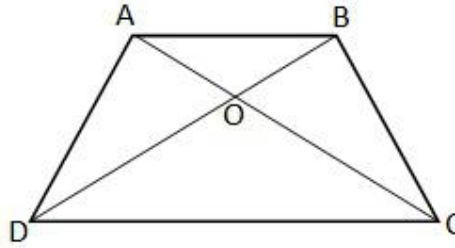
हल :

दिया है : ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ हैं,

के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। और $AB = 2 CD$ है।

$$AB = 2 CD \text{ (दिया है)}$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{2}{1} \quad \dots\dots (1)$$



अब, $AB \parallel DC$ (दिया है)

$$\angle ABO = \angle CDO \quad \dots\dots (2) \text{ एकांतर कोण }$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में,

$$\angle AOB = \angle COD \text{ शीर्षाभिमुख कोण}$$

$$\angle ABO = \angle CDO \text{ समी० (2) से}$$

A.A समरूपता कसौटी से

$$\triangle AOB \sim \triangle COD$$

अतः प्रमेय 6.6 से

$$\frac{ar(\triangle AOB)}{ar(\triangle COD)} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

$\triangle AOB$ और $\triangle COD$ के क्षेत्रफलों का अनुपात 4: 1 है ।

Q3. आकृति 6.44 में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं । यदि AD, BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि $\frac{ar(\triangle ABC)}{ar(\triangle DBC)} = \frac{AP}{DP}$ है ।

Q4. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

Q5. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य - बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं । त्रिभुज DEF और त्रिभुज ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Q6. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है ।

Q7. सिद्ध कीजिए कि दो एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है ।

Q8. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कोई भुजद BC का मध्य - बिन्दु है | त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

- (A) 2:1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

Q9. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में हैं | इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है :

- (A) 2:3 (B) 4:9 (C) 81:16 (D) 16: 81

प्रश्नावली 6.5

Q1. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm (ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm (iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

हल :

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$25^2 = 7^2 + 24^2$$

$$625 = 49 + 576$$

$$625 = 625$$

चूँकि बायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर है |

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की है |

अतः कर्ण = 25 cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

(ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

हल: निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$8^2 = 3^2 + 6^2$$

$$64 = 9 + 36$$

$$64 = 45$$

चूँकि बायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं हैं।

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm

हल: निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$100^2 = 50^2 + 80^2$$

$$10000 = 2500 + 6400$$

$$10000 = 8900$$

चूँकि बायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर नहीं है।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की नहीं हैं।

(iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

हल: निम्न मानों को पाइथागोरस प्रमेय में रखने पर

$$\text{कर्ण}^2 = \text{लंब}^2 + \text{आधार}^2$$

$$13^2 = 5^2 + 12^2$$

$$169 = 25 + 144$$

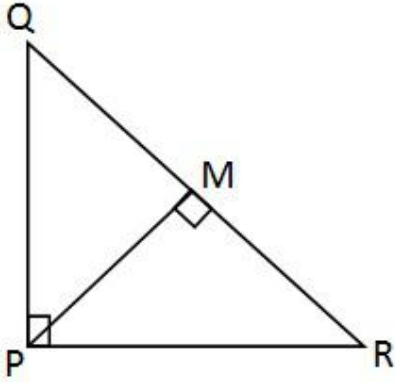
$$169 = 169$$

चूँकि बायां पक्ष और दायां पक्ष बराबर हैं।

इसलिए ये भुजाएँ समकोण त्रिभुज की हैं।

अतः कर्ण = 13 cm (सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है)

Q2. PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM \cdot MR$ है।



हल:

दिया है : PQR एक समकोण त्रिभुज है

जिसका कोण P समकोण है तथा QR

पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है।

सिद्ध करना है : $PM^2 = QM \cdot MR$

प्रमाण : $PM \perp QR$ दिया है।

इसलिए प्रमेय 6.7 से

$$\triangle PMQ \sim \triangle PRQ \quad \dots (1)$$

इसीप्रकार,

$$\triangle PMR \sim \triangle PRQ \quad \dots (2)$$

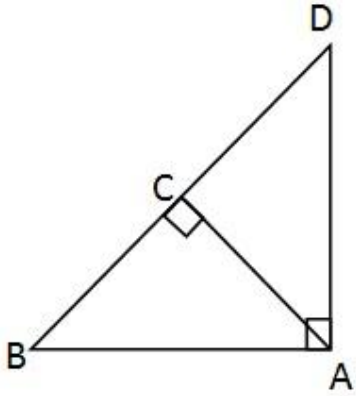
समीकरण (1) तथा (2) से

$$\triangle PMQ \sim \triangle PMR$$

$$\text{अतः } \frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM} \quad (\text{समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं})$$

$$\therefore PM^2 = QM \cdot MR$$

Q3. आकृति 6.53 में ABD एक समकोण त्रिभुज है। जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है। दर्शाइए कि



(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

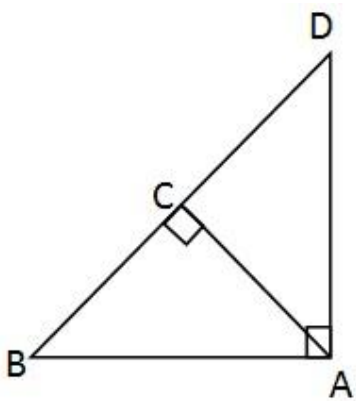
(ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

(iii) $AD^2 = BD \cdot CD$

हल :

दिया है : ABD एक समकोण त्रिभुज है | जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है |

सिद्ध करना है :



(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

(ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

(iii) $AD^2 = BD \cdot CD$

प्रमाण : (i) ABD एक समकोण त्रिभुज है और

$AC \perp BD$ दिया है |

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$ प्रमेय 6.7

अतः $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$\therefore AB^2 = BC \cdot BD$ Proved - I

(ii) $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ प्रमेय 6.7

अतः $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

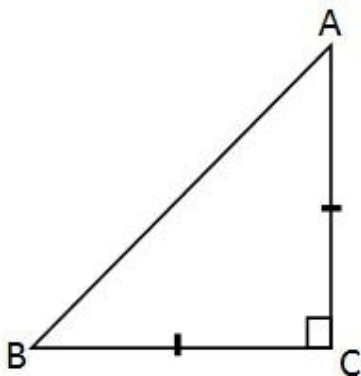
$\therefore AC^2 = BC \cdot DC$ Proved - II

(iii) $\triangle ACD \sim \triangle ABD$ प्रमेय 6.7

अतः $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ (समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$\therefore AD^2 = BD \cdot CD$ Proved - III

Q4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है | सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है |



हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसका कोण C समकोण है |

सिद्ध करना है : $AB^2 = 2AC^2$

प्रमाण : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है |

$$AC = BC \dots\dots\dots (i)$$

और ABC एक समकोण त्रिभुज है |

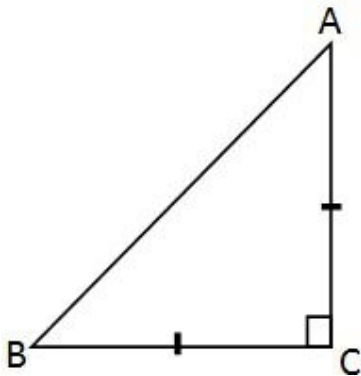
पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{अथवा } AB^2 = AC^2 + AC^2 \text{ (समी० 1 से)}$$

$$\text{अथवा } AB^2 = 2AC^2 \text{ **Proved**}$$

Q5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है | यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है |



हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है

जिसमें $AC = BC$ है और $AB^2 = 2AC^2$ है

सिद्ध करना है : ABC एक समकोण त्रिभुज है |

प्रमाण : $AC = BC \dots(1)$ दिया है

और $AB^2 = 2AC^2 \dots\dots\dots$ (दिया है)

$$\text{अथवा } AB^2 = AC^2 + AC^2$$

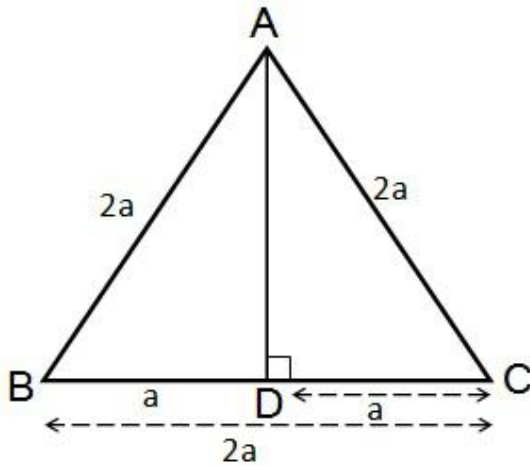
$$\text{अथवा } AB^2 = BC^2 + AC^2 \text{ (समी० 1 से)}$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम (प्रमेय 6.9) से

ABC एक समकोण त्रिभुज है | **Proved**

Q6. एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है।



$$AB = BC = AC = 2a$$

रचना : $AD \perp BC$ डाला।

अतः समकोण त्रिभुज ACD में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$(2a)^2 = AD^2 + (a)^2$$

$$4a^2 = AD^2 + a^2$$

$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$

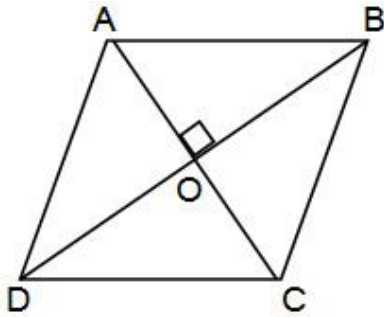
$$AD^2 = 3a^2$$

$$AD = \sqrt{3a^2}$$

$$AD = a\sqrt{3}$$

$$\text{प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई} = a\sqrt{3}$$

Q7. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।



हल:

दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी

भुजाएँ AB, BC, CD तथा AD है | और विकर्ण

AC तथा BD एक दुसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं |

सिद्ध करना है : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

प्रमाण : समचतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं | इसलिए,

समकोण $\triangle AOB$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \dots\dots\dots (1)$$

इसीप्रकार $\triangle BOC$, $\triangle COD$ और $\triangle AOD$ में,

$$BC^2 = CO^2 + BO^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$CD^2 = CO^2 + DO^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$AD^2 = AO^2 + DO^2 \dots\dots\dots (4)$$

समी० (1) (2) (3) और (4) जोड़ने पर

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + AO^2 + DO^2$$

$$\mathbf{RHS} = 2AO^2 + 2BO^2 + 2CO^2 + 2DO^2$$

$$= 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

$$= 2 \left[\left(\frac{1}{2} AC \right)^2 + \left(\frac{1}{2} BD \right)^2 + \left(\frac{1}{2} AC \right)^2 + \left(\frac{1}{2} BD \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} BD^2 + \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} BD^2 \right]$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} [AC^2 + BD^2 + AC^2 + BD^2]$$

$$= \frac{1}{2} [2AC^2 + 2BD^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 [AC^2 + BD^2]$$

$$= AC^2 + BD^2$$

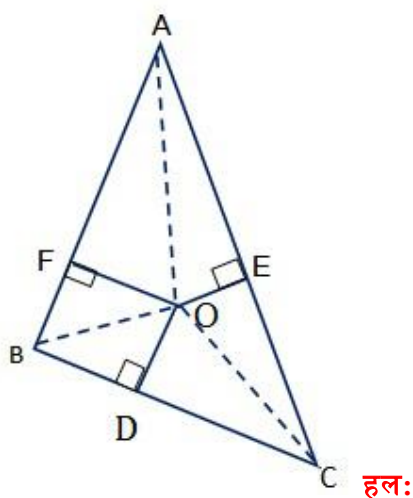
$$\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 \text{ Proved}$$

Q8. आकृति में $\triangle ABC$ के अन्तर्गत में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है |

दर्शाइए कि

$$(i) OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

$$(ii) AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$$



दिया है : $\triangle ABC$ के अन्तर्गत में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है |

सिद्ध करना है :

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

प्रमाण:

समकोण $\triangle AOF$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OA^2 = AF^2 + OF^2 \dots\dots\dots (I)$$

समकोण $\triangle BOD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OB^2 = BD^2 + OD^2 \dots\dots\dots (II)$$

समकोण $\triangle COE$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OC^2 = CE^2 + OE^2 \dots\dots\dots (III)$$

समीकरण (I), (II) तथा (III) को जोड़ने पर

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AF^2 + OF^2 + BD^2 + OD^2 + CE^2 + OE^2$$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \text{ Proved I}$$

अब, पुनः

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

$$\text{या } AF^2 + BD^2 + CE^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$$

$$\text{या } AF^2 + BD^2 + CE^2 = (OA^2 - OE^2) + (OB^2 - OF^2) + (OC^2 - OD^2)$$

$$\text{या } AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2 \text{ पाइथागोरस प्रमेय से}$$

Q9.

Q10.

Q11.

Q12.

Q13. किसी त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित है।

सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है।

हल:

दिया है : त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित है।

सिद्ध करना है :

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$$

रचना : D को E से मिलाया।

प्रमाण:

समकोण $\triangle ACE$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 \dots\dots\dots (I)$$

इसीप्रकार,

समकोण $\triangle BCD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \dots\dots\dots (II)$$

समीकरण (I) तथा (II) को जोड़ने पर

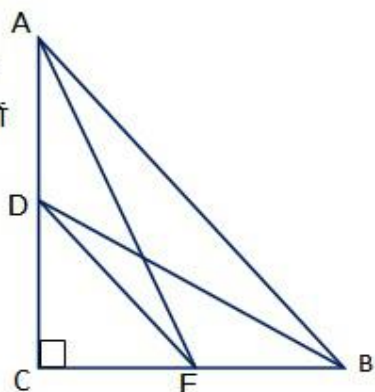
$$AE^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2$$

$$AE^2 + BD^2 = (AC^2 + BC^2) + (CE^2 + CD^2)$$

$$AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2 \text{ Proved}$$

पाइथागोरस प्रमेय से

$$[\because AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ और } DE^2 = CE^2 + CD^2]$$



Q14. किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लंब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $DB = 3CD$ है।

सिद्ध कीजिए कि : $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है।

हल:

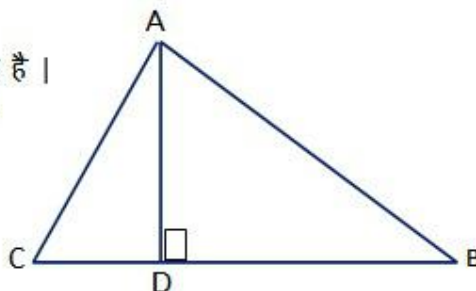
दिया है : ABC एक त्रिभुज है ।

जिसमें $AD \perp BC$ है तथा

$DB = 3CD$ है ।

सिद्ध करना है :

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$



प्रमाण:

$$CD = BC - BD$$

$$CD = BC - 3CD$$

$$4CD = BC$$

$$CD = \frac{BC}{4} \quad \dots \dots \dots (I)$$

$$DB = 3CD \quad \text{दिया है ।}$$

$$DB = \frac{3BC}{4} \quad \dots \dots \dots (II)$$

समकोण $\triangle ACD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$\text{Or } AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \dots \dots \dots (III)$$

समकोण $\triangle ABD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BD^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 + \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$$

$$AB^2 = AC^2 - \frac{BC^2}{16} + \frac{9BC^2}{16}$$

$$AB^2 = AC^2 + \frac{8BC^2}{16}$$

$$AB^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2 \quad \text{Proved}$$

Q15. किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D तक इस प्रकार

स्थित है कि $BD = \frac{1}{3} BC$ है । सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है ।

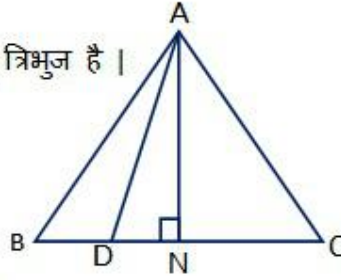
हल:

दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है ।

जिसमें $BD = \frac{1}{3} BC$ है ।

सिद्ध करना है :

$$9AD^2 = 7AB^2$$



रचना : $AN \perp BC$ खिंचा ।

प्रमाण:

$$BD = \frac{1}{3} BC \text{ दिया है । } \text{----- (I)}$$

$$BN = \frac{1}{2} BC \left[\because AN \perp BC \text{ है रचना से } \right] \text{ (II)}$$

$$DN = BN - BD$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} BC - \frac{1}{3} BC \\ &= \frac{3BC - 2BC}{6} = \frac{BC}{6} \end{aligned}$$

समकोण $\triangle ADN$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AD^2 = AN^2 + DN^2$$

$$\text{Or } AN^2 = AD^2 - DN^2 \text{ (III)}$$

समकोण $\triangle ABN$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AN^2 + BN^2$$

$$AB^2 = (AD^2 - DN^2) + BN^2 \text{ समी० (I) से}$$

$$AB^2 = AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2}{36} + \frac{BC^2}{4}$$

$$AB^2 = AD^2 - \frac{BC^2 + 9BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{8BC^2}{36}$$

$$AB^2 = AD^2 + \frac{2BC^2}{9}$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2BC^2$$

$$9AB^2 = 9AD^2 + 2AB^2$$

$$9AB^2 - 2AB^2 = 9AD^2$$

$$7AB^2 = 9AD^2$$

Q16. किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

हल:

दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

जिसमें $AD \perp BC$ हैं।

सिद्ध करना है :

$$3AB^2 = 4AD^2$$

प्रमाण: समकोण त्रिभुज ABD में,

पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\text{Or } AB^2 = AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \quad \left[\because DB = \frac{1}{2}BC\right]$$

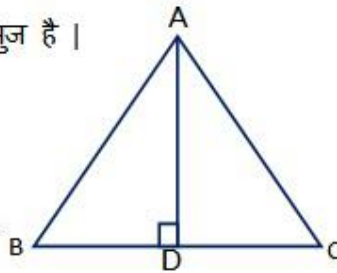
$$\text{Or } AB^2 = AD^2 + \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{Or } 4AB^2 = 4AD^2 + BC^2$$

$$\text{Or } 4AB^2 = 4AD^2 + AB^2 \quad [\because AB = BC]$$

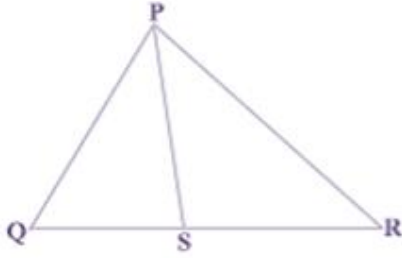
$$\text{Or } 4AB^2 - AB^2 = 4AD^2$$

$$\text{Or } 3AB^2 = 4AD^2 \text{ Proved}$$

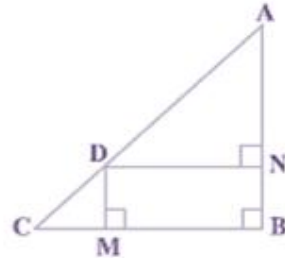


प्रश्नावली 6.6

Q1. आकृति 6.56 में PS कोण QPR का समद्विभाजक है | सिद्ध कीजिए कि $QS/SR = PQ/PR$ है।



आकृति 6.56



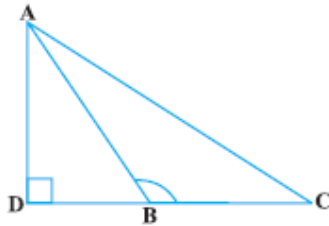
आकृति 6.57

Q2. आकृति 6.57 में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिन्दु है तथा $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$ है | सिद्ध कीजिए कि

(i) $DM^2 = DN \cdot MC$

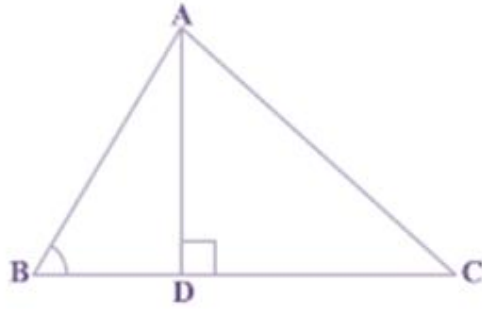
(ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

Q3. आकृति 6.58 में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90^\circ$ है तथा $AD \perp BC$ है | सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$ है |



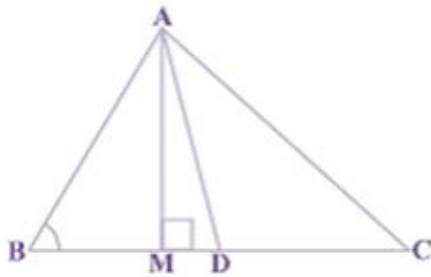
आकृति 6.58

Q4. आकृति 6.59 में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC < 90^\circ$ है तथा $AD \perp BC$ है | सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$ है |



आकृति 6.59

Q5. आकृति 6.60 में AD त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है तथा $AM \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए की



आकृति 6.60

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + (BC/2)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + (BC/2)^2$

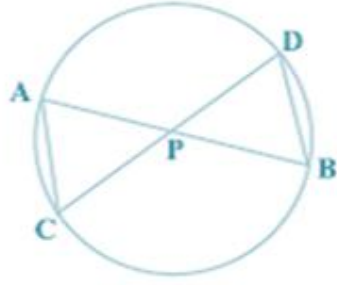
(iii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2} BC^2$

Q6. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

Q7. आकृति 6.61 में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) त्रिभुज APC ~ त्रिभुज DPB

(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$



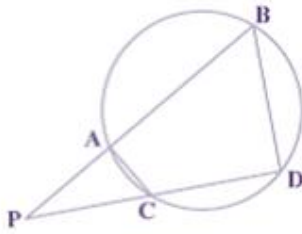
आकृति 6.61

Q8. आकृति 6.62 में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढ़ाने पर परस्पर बिन्दु P पर करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

प्रतिच्छेद

(i) त्रिभुज PAC ~ त्रिभुज PDB

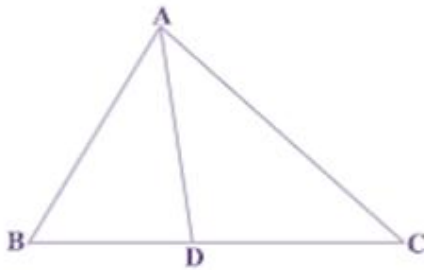
(ii) PA . PB = PC . PD



आकृति 6.62

Q9. आकृति 6.63 में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।

BD/CD



आकृति 6.63

Q10. नाजिमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है। उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8 m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाजिमा से दूरी 3.6 m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिन्दु से उसकी दूरी 2.4m है। यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी

बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति 6.64) ? यदि वह डोरी को 5 cm/s की दर से अन्दर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दूरी कितनी होगी ?

