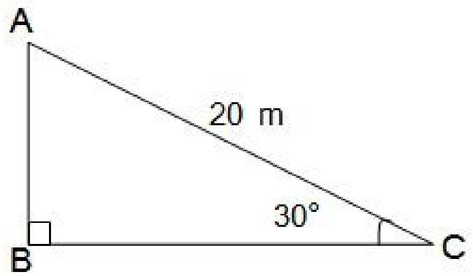
9. त्रिकोणमिति का अनुप्रयोग

Q1. सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंध हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)|

Solution:

माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर



डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30^\circ$

समकोण त्रिभुज ABC में;

माना खंभे की ऊँचाई = h मीटर

डोरी की लंबाई = 20 मीटर

$\theta = 30°$

समकोण त्रिभुज ABC में;

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\sin 30° = \frac{h}{20}$

$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$

2h = 20 [bi-cross Method के प्रयोग से]

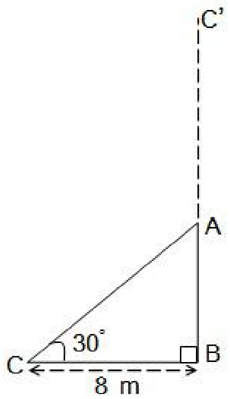
$h = \frac{20}{2} = 10$ m

अत: खंभे की ऊँचाई = 10 मीटर

Q2. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30 ° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिंदु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना पेड़ की ऊँचाई BC' है और पेड़ बिंदु A से टूटकर



जमीन पर बिंदु C पर झुकी है |

$\theta = 30^\circ$, BC = 8 m

समकोण त्रिभुज ABC में, AB भुजा के लिए,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8}$$

$$AB\sqrt{3} = 8$$

$$AB = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

इसीप्रकार AC भुजा के लिए ;

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$$

$$\sqrt{3}\,AC = 8 \times 2 = 16$$

$$AC = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

पेड़ की ऊँचाई = AB + AC

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

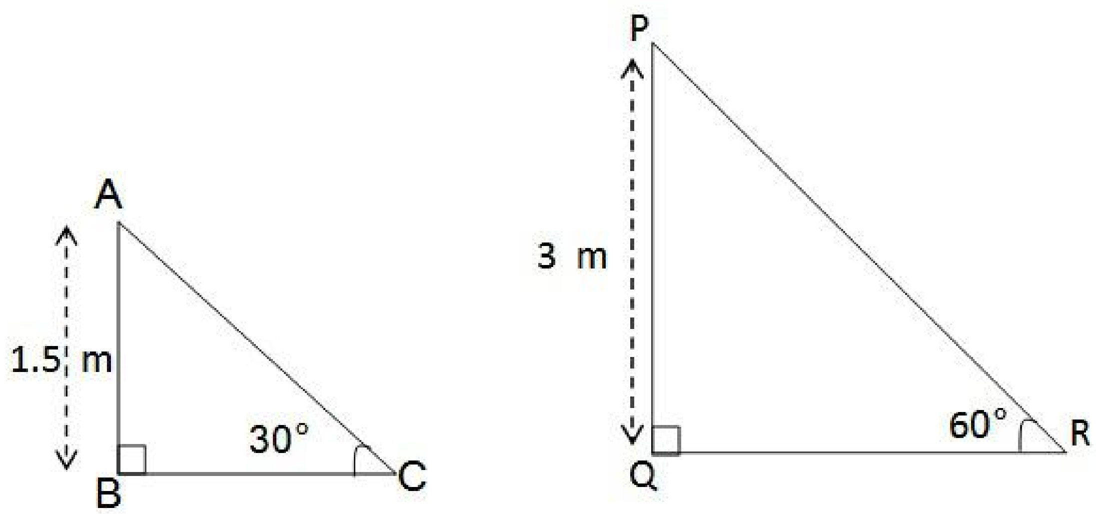
हर का परिमेइकरण करने पर

$$\frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ m}$$

अत: पेड़ की ऊँचाई = $8\sqrt{3}$ मीटर

Q3. एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3 m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लंबाई क्या होनी चाहिए?

Solution:



Case-I

समकोण त्रिभुज ABC में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई AC है

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\sin 30° = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{2} = \frac{1.5}{AC}$

AC = 2 × 1.5 = 3 m

अत: छोटी फिसलनपट्टी की लंबाई = 3 मीटर

अब, Case-II

समकोण त्रिभुज PQR में,

माना फिसलनपट्टी की लंबाई PR है

$\sin\theta = \frac{PQ}{PR}$

$\sin 60° = \frac{3}{PR}$

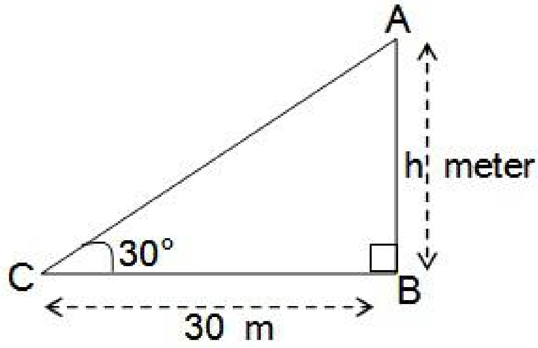
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{PR}$

$PR = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ m

अत: बड़ी फिसलनपट्टी की लंबाई = $2\sqrt{3}$ मीटर

Q4. भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30 m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना मीनार AB की ऊँचाई = h मीटर

बिंदु C से मीनार के पाद बिंदु B की दुरी = 30 m

समकोण ΔABC में,

समकोण ΔABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

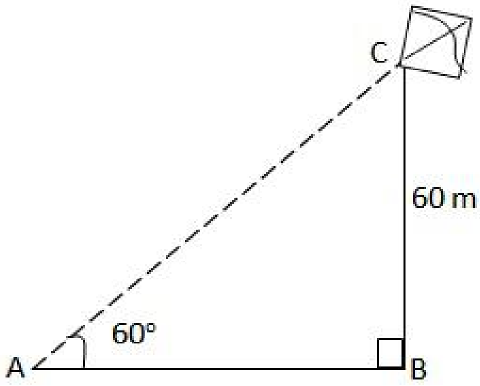
$$\sqrt{3}\,h = 30$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\ m$$

अत: मीनार की ऊँचाई = $10\sqrt{3}$ मीटर

Q5. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध् दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना AC डोरी की लंबाई है |

और भूमि से पतंग की ऊँचाई h = 60 m है |

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$

$\sin 60^\circ = \frac{60}{AC}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{AC}$

$AC \times \sqrt{3} = 2 \times 60$

$AC = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}\ m$

अत: डोरी की लंबाई = $40\sqrt{3}$ मीटर

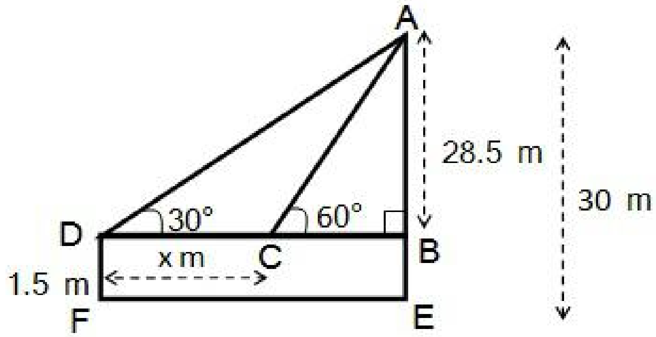
Q6. 1.5 m लंबा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है।

Solution:

माना कि वह लड़का x m दूर भवन की ओर गया |

लडके ऊंचाई छोड़कर भवन की ऊंचाई (AB) = 30 m - 1.5 m

= 28.5 m



समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{28.5}{BC}$

$\sqrt{3} = \frac{28.5}{BC}$

$BC = \frac{28.5}{\sqrt{3}}$ ....(1)

समकोण त्रिभुज ABD में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$

$\tan 30^\circ = \frac{28.5}{x + BC}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28.5}{x + BC}$

$BC + x = 28.5\sqrt{3}$

$\frac{28.5}{\sqrt{3}} + x = 28.5\sqrt{3}$ समी0 (1) से

$x = 28.5\sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{28.5 \times 3 - 28.5}{\sqrt{3}}$

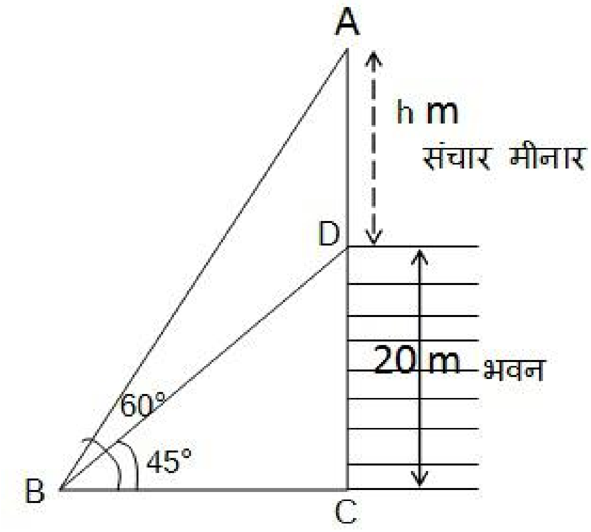
$x = \frac{28.5\,(3-1)}{\sqrt{3}} = \frac{28.5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{57}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{57}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{57\sqrt{3}}{3}$

$x = 19\sqrt{3}$ m

अत: वह मीनार की ओर $19\sqrt{3}$ m गया |

Q7. भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



Solution:

माना संचार मीनार की ऊंचाई (AD) = h m

भवन की ऊंचाई (DC) = 20 m

माना भूमि पर वह बिंदु B है |

भवन सहित मीनार की ऊंचाई (AC) = (20 + h) m

समकोण त्रिभुज BCD में,

$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$

$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$

$1 = \frac{20}{BC}$

$BC = 20\ m .... (1)$

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{20 + h}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{20 + h}{20}$ समी० (1) से

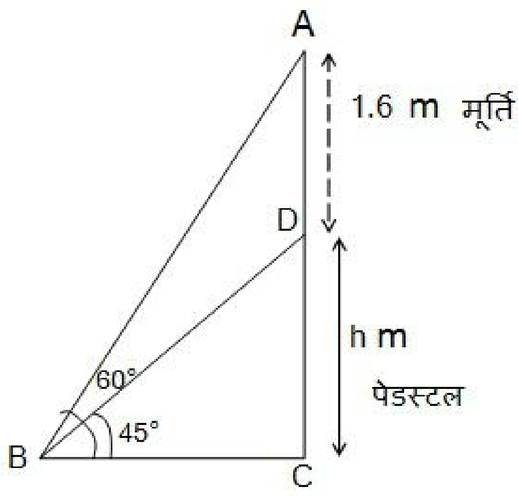
$20 + h = 20\sqrt{3}$

$h = 20\sqrt{3} - 20$

$\boxed{h = 20(\sqrt{3} - 1)\ m}$

अत: संचार मीनार की ऊंचाई $= 20(\sqrt{3} - 1)\ m$

Q8. एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिंदु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी ¯बदु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



Solution:

माना पेडस्टल की ऊंचाई h मीटर है |

मूर्ति की ऊंचाई = 1.6 m

समकोण त्रिभुज BCD में,

$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$

$\tan 45^\circ = \frac{DC}{BC}$

$1 = \frac{h}{BC}$

$BC = h\ m$ .... (1)

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{h + 1.6}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h + 1.6}{h}$ समी० (1) से

$h\sqrt{3} = h + 1.6$

$h\sqrt{3} - h = 1.6\ m$

$h(\sqrt{3} - 1)\ m = 1.6\ m$

$h = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1}$

हर का परिमेयीकरण करने पर

$h = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

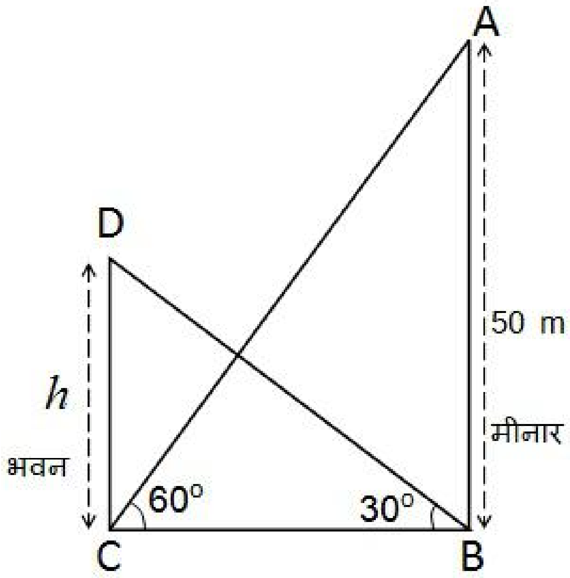
$= \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{2}$

$\boxed{h = 0.8(\sqrt{3} + 1)\ m}$

अत: पेडस्टल की ऊंचाई = $0.8(\sqrt{3} + 1)$ m हैं |

Q9. एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना भवन की ऊंचाई = h m

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{50}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{50}{BC}$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

समकोण त्रिभुज BCD में,

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{BC}$$

$$BC = h\sqrt{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{50}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$$

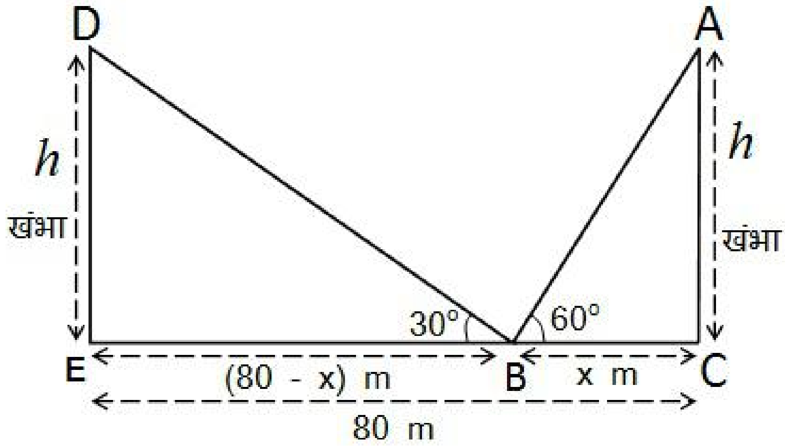
$$3h = 50$$

$$\boxed{h = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\ m}$$

अत: भवन की ऊंचाई $16\frac{2}{3}$ m है |

Q10. एक 80 m चैड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लंबाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिंदु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना भूमि पर वह बिंदु B है |

और खंभों की ऊंचाई = h मी०,

B बिंदु से एक खंभे की दुरी = x m

तो दुसरे खंभे की दुरी = (80 - x) m

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AC}{BC}$

$\tan 60^0 = \frac{h}{BC}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$

$x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ....(1)

समकोण त्रिभुज BED में,

$\tan\theta = \frac{DE}{BE}$

$\Rightarrow \tan 30^0 = \frac{h}{BE}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(80 - x)}$

$\Rightarrow 80 - x = h\sqrt{3}$

समी० 1 से $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ रखने पर

$\Rightarrow 80 - \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$

$\Rightarrow h\sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}} = 80$

$$\Rightarrow \frac{3h + h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = 80$$

$$\Rightarrow 4h = 80\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{80\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3}\,m$$

समी० में h का मान रखने पर

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = 20\ m$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 20\sqrt{3}\,m,\ x = 20\ m}$$

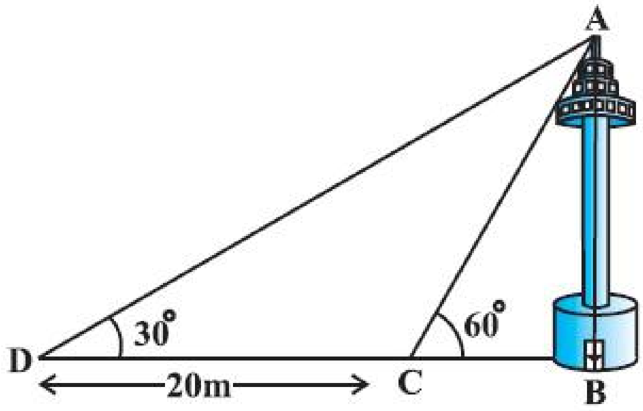
अत: खंभे की ऊंचाई = $20\sqrt{3}\,m$

एक खंभे की दुरी = 20 m

दुसरे खंभे की दुरी = 80 - 20 = 60 m

Q11. एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर उर्ध्वाधर खड़ा है टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिंदु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिंदु से 20 m दूर और इस बिंदु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिंदु से टावर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है । टॉवर की ऊँचाई और नहर की चैड़ाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना टॉवर (AB) की ऊंचाई = h मी०

नहर BC की चौड़ाई = x मी०

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$

$\tan 30^\circ = \frac{h}{DC + BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20 + x}$

$\Rightarrow 20 + x = h\sqrt{3}$

$\Rightarrow 20 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h\sqrt{3}$

(x का मान रखने पर समी० 1 से)

$\Rightarrow 20 = h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 20$

$\Rightarrow 3h - h = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2h = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}\,m$

समी० 1 से

$x = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$x = 10\ m$

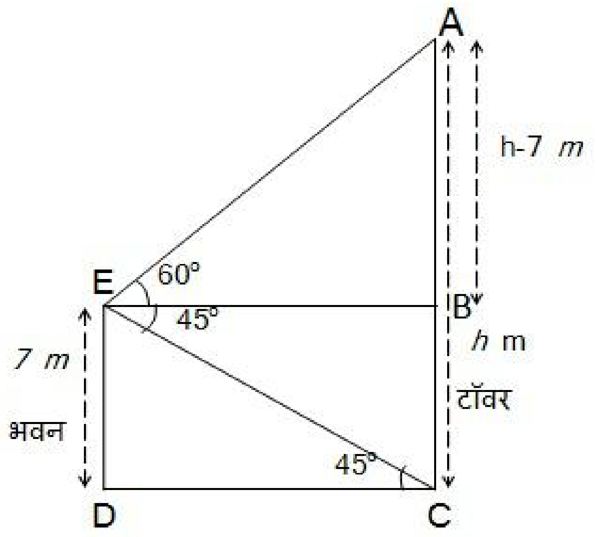
$\Rightarrow h = 10\sqrt{3}\,m,\ x = 10\ m$

अत: टॉवर की ऊंचाई = $10\sqrt{3}\,m$ और

नहर की चौड़ाई = 10 m

Q12. 7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना टॉवर की ऊँचाई = h मीटर

भवन DE की ऊंचाई = 7 मी०

DE = BC = 7 मी०

AB की लंबाई = h - 7 मी०

समकोण त्रिभुज EDC में,

$$\tan\theta = \frac{ED}{DC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{7}{DC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{7}{DC}$$

$DC = 7$ m

$DC = BE = 7$ m

अब समकोण त्रिभुज ABE में

$$\tan\theta = \frac{AB}{BE}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h-7}{BE}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h-7}{7}$$

$h - 7 = 7\sqrt{3}$

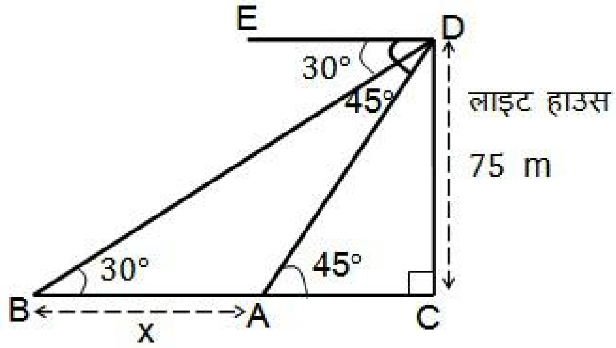
$h = 7\sqrt{3} + 7$

$h = 7(\sqrt{3} + 1)$ m

टॉवर की ऊँचाई $= 7(\sqrt{3} + 1)$ m

Q13. समुद्र-तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Solution:



माना दो जहाजों A तथा B है

जिनका अवनमन कोण क्रमश: 45° और 30° है |

लाइट-हाउस DC की ऊंचाई = 75 m

चूँकि अवनमन कोण उन्नयन कोण के बराबर होता है |

$\therefore \angle DAC = 45^\circ$ और $\angle DBC = 30^\circ$

$$\tan\theta = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{75}{AC}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{75}{AC}$$

AC = 75 m

अब, समकोण त्रिभुज DBC में,

$$\tan\theta = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{75}{BA + AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BA + 75}$$

$BA + 75 = 75\sqrt{3}$ m

$BA = 75\sqrt{3} - 75$

$BA = 75(\sqrt{3} - 1)$ m

दो जहाजों के बीच की दूरी = $75(\sqrt{3} - 1)$ m है |

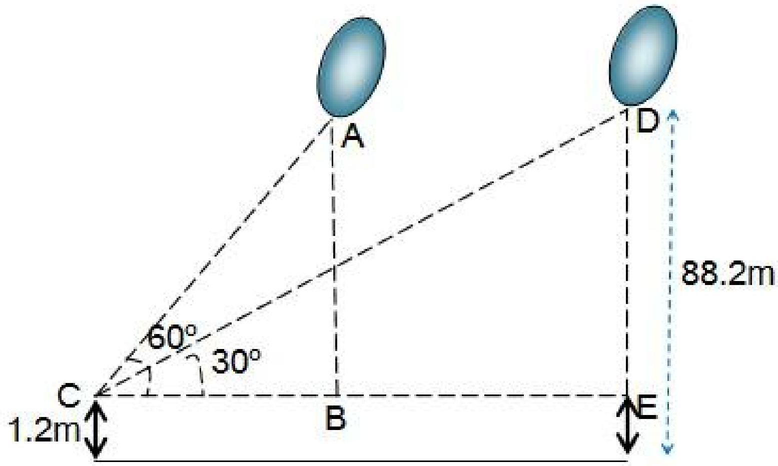
Q14. 1.2 m लंबी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है | इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दुरी ज्ञात कीजिए |

Solution:

लड़की की ऊंचाई = 1.2 m

भूमि से गुब्बारे की ऊंचाई = 88.2 m

लड़की को छोड़कर गुब्बारे की ऊंचाई = 88.2 - 1.2



AB = DE = 87.0 m

तय दुरी = BE

समकोण DABC में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{87}{BC}$$

$$BC = \frac{87}{\sqrt{3}}$$

समकोण ΔDEC में,

$$\tan\theta = \frac{DE}{CE}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{DE}{CE}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{87}{BC+BE}$$

$$BC + BE = 87\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\frac{87}{\sqrt{3}} + BE = 87\sqrt{3} \text{ m}$$

$$BE = 87\sqrt{3} - \frac{87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87\times3 - 87}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(3-1)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87(2)}{\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87\times2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$BE = \frac{87\times2\times\sqrt{3}}{3} = 29\times2\sqrt{3}$$

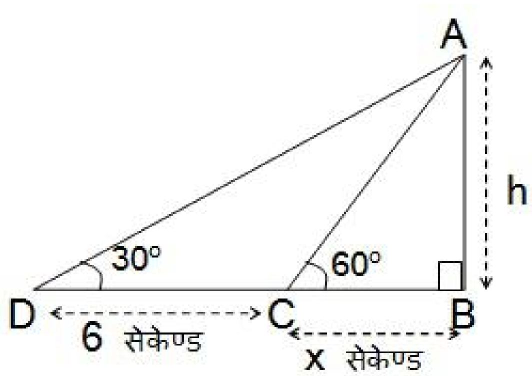
$$BE = 58\sqrt{3} \text{ m}$$

अर्थात इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दुरी $87\sqrt{3}$ m है |

Q15. एक सीध राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एक समान चाल से जाता है। छः सेकंड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिंदु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

Solution:

माना कार को बिंदु C से मीनार के पाद B तक पहुँचने में x सेकेण्ड लगता है |



समकोण ΔABC में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$ .... (1)

$\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{h}{x}$

$h = x\sqrt{3}$ m .... (1)

समकोण ΔABD में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BD}$

$\tan 30^\circ = \frac{h}{6 + x}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{6 + x}$

$6 + x = h\sqrt{3}$ m

$6 + x = (x\sqrt{3})\sqrt{3}$ m [$h = x\sqrt{3}$ रखने पर]

$6 + x = 3x$

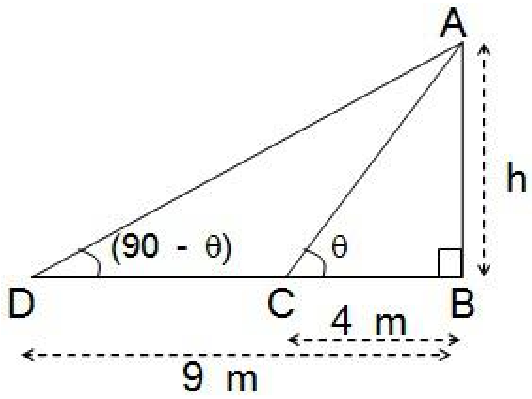
$3x - x = 6$

$2x = 6$

$x = 3$

मीनार तक पहुँचने में लगा समय = 3 सेकंड

Q16. मीनार के आधर से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो ¯बदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।



Solution:

माना मीनार की ऊँचाई = h मीटर है |

समकोण त्रिभुज ABC में,

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan\theta = \frac{h}{4}$ .... (1)

समकोण त्रिभुज ABD में,

$\tan(90 - \theta) = \frac{AB}{BD}$

$\tan(90 - \theta) = \frac{h}{9}$

$\cot\theta = \frac{h}{9}$ .... (2) $[\because \tan(90 - \theta) = \cot\theta]$

समी० (1) को (2) से गुणा करने पर

$\tan\theta.\cot\theta = \frac{h}{4}.\frac{h}{9}$

$1 = \frac{h^2}{36}$

$h^2 = 36$

$h = \sqrt{36}$

$h = 6$ m

अत: मीनार की ऊँचाई = 6 मीटर है | (सिद्ध हुआ)